

第3讲 一元二次方程的实际应用

|| 列方程解应用题的一般步骤

- ① **审**：审题，分析题中已知是什么，求什么，明确各数量之间关系；
- ② **找**：找出能够表示应用题全部意义的一个相等关系；
- ③ **设**：设未知数（一般求什么，就设什么为未知数）；
- ④ **列**：根据这个相等关系列出需要的代数式，进而列出方程；
- ⑤ **解**：解所列出的方程，求出未知数的值；
- ⑥ **验**：检验所求解是否符合题意；
- ⑦ **答**：写出答案（包括单位名称）。

【备注】 ① 审题技巧：忽略废话，找重点。很多题干又臭又长，看的时候要快速的略过，不要浪费太多时间。重点的内容注意划线。

② 找：找等量关系，常见等量关系有 $A = B$ 、 $A + B = C$ 、 $A = 2B + C$ 等形式，也是最基本的和差倍分。

③ 设：**!** 不是所有的题都是求什么设什么，求什么就设什么属于直接设元，大约80%以上的题目都可以直接设元；少部分题目需要间接设元，部分内容还需要设辅助元（了解即可）

④ 列：列方程没啥难度，等量关系找到了列方程是水到渠成的事。

⑤ 解：解方程的过程没有采分点，在演算纸上进行即可。

⑥ 验：检验答案是否符合实际与题意，比如求出来 $x = 1.5$ 结果单位是（人），那肯定要琢磨一下哪出了问题。

⑦ 答：答不写考试扣一分。

一、增长率问题

探究：

1、某厂1月份总产量为100吨，平均每月增长20%，则2月份总产量为 120 吨，3月份总产量为 144 吨。（填具体数字）

2、某种商品原价为100元，平均每次降价10%，则第一次降价后的售价为 90 元，第二次降价后的售价为 81 元。（填具体数字）

【备注】 对于第二次的增长（下降）可以用两种方法：

① 在第一次数据的基础上，直接利用增长（下降）率进行计算，第一次数据 $\times (1 + x)$

② 直接利用初始数据计算，初始数据 $\times (1 + x)^2$

讲解时要培养学生学会利用第二种方法解题，便于后续列方程

！总结：

两次平均增长（下降）率问题的一般关系： $a(1 \pm x)^2 = A$

n 次平均增长（下降）率问题的一般关系： $a(1 \pm x)^n = A$

【备注】上述公式中的三个参数的意义：

a ：基数， A ：新数， x ：增长率（下降率）

解题时要注意审题，区分好题中给出的是第几次变化后的数据还是总数据。

第一季度：1~3月 第二季度：4~6月 第三季度：7~9月 第四季度：10~12月

 举个“栗子”

 栗子1

1. 受益于国家支持新能源汽车发展和“一带一路”发展战略等多重利好因素，我市某汽车零部件生产企业的利润逐年提高，据统计，2016年利润为2亿元，2018年利润为2.88亿元．

（1）求该企业从2016年到2018年利润的年平均增长率．

（2）若2019年保持前两年利润的年平均增长率不变，该企业2019年的利润能否超过3.4亿元？

【备注】题中给出的是两次变化后的数据，直接利用总结的公式列方程计算

！结果还要注意实际问题中未知数的几何意义，如增长率则不能为负数，降低率通常不能小于1

【答案】（1）20%．

（2）能．

【解析】（1）设这两年该企业年利润平均增长率为 x ，

由题意得， $2(1+x)^2 = 2.88$ ，

解得 $x_1 = 0.2 = 20\%$ ， $x_2 = -2.2$ （不合题意，舍去）．

答：该企业从2016年到2018年利润的年平均增长率为20%．

（2）如果2019年仍保持相同的年平均增长率，那么2019年该企业的利润为

$2.88 \times (1 + 20\%) = 3.456$ ，

$3.456 \geq 3.4$ ，

所以该企业2019年的利润能超过3.4亿元．

【标注】【知识点】一元二次方程的增长率问题

 栗子2

2.

某超市一月份的营业额为200万元，已知第一季度的总营业额共1000万元，如果平均每月增长率为 x ，则由题意列方程应为（ ）。

A. $200(1+x)^2 = 1000$

B. $200 + 200 \times 2x = 1000$

C. $200 + 200 \times 3x = 1000$

D. $200[1 + (1+x) + (1+x)^2] = 1000$

【备注】第一季度的总营业额是1000万元，所以需要分别表示出三个月然后再相加

【答案】 D

【解析】 ∵一月份的营业额为200万元，平均每月增长率为 x ，

∴二月份的营业额为 $200(1+x)$ ，

∴三月份的营业额为 $200 \times (1+x) \times (1+x) = 200(1+x)^2$ ，

∴可列方程为 $200 + 200 \times (1+x) + 200 \times (1+x)^2 = 1000$ ，

即 $200[1 + (1+x) + (1+x)^2] = 1000$ 。

【标注】【知识点】一元二次方程的增长率问题

栗子3

3. 商场中换季衣服都要打折处理，今年10月某商店将某种春秋装以原价8.1的折出售，到了11月，再次降价，现将这种春秋装仅以原价的6.4折出售，经过两次降价，则平均折扣率是 _____。

【备注】此题中的8.1没有实际的意义，既然求解平均折扣率，我们只需要根据两次变化后是原价的6.4折进行计算即可；同时本题中的原价可看作单位“1”
平均变化率只要明确好两次变化前后的数据即可列方程

【答案】 20%

【解析】 设春秋装原价为1，平均折扣率为 x ，

$$(1-x)^2 = \frac{6.4}{10}$$

$$1-x = \pm 0.8,$$

$$\textcircled{1} 1-x = 0.8$$

$$x = 0.2.$$

$$\textcircled{2} 1-x = -0.8,$$

$$x = 1.8 \text{ (舍)}.$$

∴平均折扣率20%。

【标注】【知识点】一元二次方程的增长率问题

4. 受疫情影响某旅游景区今年第一季度的游客数量比去年第四季度下降20% . 当地政府果断采取调控政策, 若该旅游景区计划在今年第二、三季度游客人数持续增长, 且计划第三季度游客人数比去年第四季度增长7.8%, 设第二、三季度的平均增长率为 x , 下列方程正确的是() .
- A. $(1 - 20\%)(1 + x)^2 = 1 + 7.8\%$ B. $(1 - 20\%)(1 + 2x) = 1 + 7.8\%$
 C. $(1 + x)^2 = 1 - 20\% + 7.8\%$ D. $1 + 2x = 1 - 20\% + 7.8\%$

【备注】 本题需要先判断出单位"1"为去年第四季度, 而今年第二、第三季度是在今年第一季度的基础上进行的增长

【答案】 A

【解析】 根据题意, 得

第二季度游客数量是第一季度的 $(1 - 20\%)$,

第三季度游客数量是第一季度的 $(1 - 20\%)(1 + x)$,

第四季度游客数量是第一季度的 $(1 - 20\%)(1 + x)^2$,

即 $1 + 7.8\%$, 列方程, 得

$$(1 - 20\%)(1 + x)^2 = 1 + 7.8\% .$$

故选A .

【标注】 【知识点】一元二次方程的增长率问题

二、利润问题

探究：

某商品现在的售价为每件60元 . 每星期可卖出300件 . 市场调查反映：如果调整价格，每降价1元，每星期可多卖出10件 . 请你帮助分析，当每件商品降价多少元时，可使每星期的销售额为19250元 . 设每件商品降价 x 元 .

分析：根据问题中的数量关系，用含 x 的式子填表：

	原价	每件降低1元	每件降低2元	...	每件降低 x 元
每件售价 (元)	60	59	58	...	$60 - x$
每星期销量 (件)	300	310	320	...	$300 + 10x$

列方程得（不需解方程）：

$$(60 - x)(300 + 10x) = 19250$$

若改为“当每件商品售价为多少元时，可使每星期的销售额为19250元”，怎样列方程。

每件售价 (元)	60	59	58	...	每件售价 y 元
每件降价 (元)	0	1	2	...	$60 - y$
每星期销量 (件)	300	310	320	...	$300 + 10(60 - y)$

列方程得（不需解方程）：

$$(60 - y)[300 + 10(60 - y)] = 19250$$

【备注】 本题中给出的销售额，因此不需要考虑利润的问题，若改为利润，则要用销售额-成本。

！总结：

利润的减少会导致销量的增加，所以 **新总利润 = 新利润 × 新销量**

【备注】 解题时只要列出新利润、新销量即可。解题时要注意题中的未知数设的是降（涨）多少元还是售价为多少元；销量的变化要与题中变化的量对应上，比如说每上涨3元，销量增加5个，若上涨 x 元，则销量增加 $\frac{x}{3} \times 5$ 个。实际应用问题中还要注意未知数的实际意义，注意结果的取舍。

👤 举个“栗”子

栗子5

👤 设降价为 x

5. 某商场服装部销售一种名牌衬衫，平均每天可销售出180件，每件盈利12元．为了扩大销售，减少库存，商场决定降价销售，经调查，每件降价1元时，平均每天可多卖出10件．若商场要求该服装部每天盈利2000元，则每件衬衫应降价多少元？

【备注】为减少库存或为使获利于顾客，都意味着要扩大销量，所以要选降价多的，总结一句话就是：“薄利多销”．

【答案】 2．

【解析】 设每件衬衫应降价 x 元，由题意得：

$$(12 - x)(180 + 10x) = 2000,$$

$$\text{解得：} x_1 = -8, x_2 = 2,$$

因为尽量减少库存， $x_1 = -8$ ，舍去．

答：每件衬衫应降价2元．

【标注】【知识点】一元二次方程的利润问题

栗子6

 设售价为 x

6. 已知该工艺品的成本是40元/件，如果以单价100元/件销售，那么每天可售出200件，另每天除工艺品的成本外所需支付的各种费用是2000元，根据销售经验，如果将销售单价降低1元，每天可多售出20件，请问该公司每天所获利润能否达到22500元．如果能，应该把销售单价定为多少元，如果不能，请说明理由．

【备注】此题设“售价”为未知数，两种未知数列方程的方法都要学会

【答案】 能，75．

【解析】 假设能．

设销售单价定为 x 元，

$$\text{由题意得 } (x - 40)[200 + 20(100 - x)] - 2000 = 22500,$$

$$x^2 - 150x + 5625 = 0$$

$$(x - 75)^2 = 0$$

$$x_1 = x_2 = 75.$$

答：能，销售单价定为75元时，获得利润达到22500元．

【标注】【知识点】一元二次方程的利润问题

7. 某商场一种商品的进价为每件30元，售价为每件40元，每天可以销售48件，为尽快减少库存，商场决定降价促销．

(1) 若该商品连续两次下调相同的百分率后售价降至每件32.4元，求两次下降的百分率．

(2) 经调查，若该商品每降价0.5元，每天可多销售4件，那么每天要想获得512元的利润，每件应降价多少元？

【备注】 此题中要注意是每降价0.5元，销量增加4件，所以在求解销量变化的时候要先除以0.5

【答案】 (1) 10% .

(2) 2 .

【解析】 (1) 设每次降价的百分率为 x ，

$$\text{则有 } 40 \times (1 - x)^2 = 32.4 ,$$

$$\text{解得： } x_1 = 0.1 , x_2 = 1.9 \text{ (舍) .}$$

答：两次下降的百分率为10% .

(2) 设每件商品应降价 y 元，可以每天获得512元利润，

$$\text{根据题意得： } (40 - 30 - y) \left(\frac{y}{0.5} \times 4 + 48 \right) = 512 ,$$

$$\text{解得： } y_1 = y_2 = 2 .$$

答：要使商场每天想要获得512元的利润，每件应降价2元 .

【标注】 【知识点】一元二次方程的利润问题

三、 传染问题

探究：

有一人得了流感，他把流感传染给了10个人，共有 11人 得流感；第一轮传染后，所有得流感的人每人又把流感传染给了10个人，经过两轮传染后，共有 121 人得流感．

【备注】 有一人得了流感后，经过一轮传染，共有 $1 + 1 \times 10$ 人得流感；再经过一轮传染后，共有 $1 + 1 \times 10 + (1 + 1 \times 10) \times 10$ 人得流感。

按照上面的思路继续探究：

有一个人患了流感，经过两轮传染后共有81人患了流感．试求每轮传染中平均一个人传染了几个人？

分析：

解：设每轮传染中平均一人传染了 x 个人。

开始有一个人患了流感，第一轮传染的感染者就是这个人，他传染了 x 个人，所以第一轮后共有 $1+x$ 人患了流感。

第二轮传染中，这些人中每个人又传染了 x 个人，第二轮后新传染了 $x(1+x)$ 个人，那么第二轮后共有 $1+x+x(1+x)$ 个人患了流感。（用代数式表示）

列方程： $1+x+x(1+x)=81$ 。

解方程得： $x=8$ 或 -10 （舍）。

答：平均一人传染了 8 人。

【备注】 传染问题保证的是传染过程中，感染速度一致，经过两轮传染，得到什么效果。本题中两轮传播后共有 $1+x+x(1+x)$ 人患了流感，这个代数式也相当于 $(1+x)^2$ ，与增长率问题完全相同。但是，中间如果插入一些变化，结论就完全不同了。

可对学生继续提问：例如病毒在第二轮传播过程中，如果发生变异，传染力变为2倍，如何列式？如果病毒在第二轮传播中，出现了解药，感染者被治愈了一半，又如何列式？

这时就需要我们一步步的把每个环节列出来，再去求最终的感染人数了。

！总结：

传染问题中，每轮传染的新患者会和老患者一同感染下一波人群，将每轮的新增患者数算出来，最后求和列方程。在感染速度不变的情况下，由1人经过两轮传染，最后会有 $\left(1+x\right)^2$ 人患病。

👤 举个“栗”子

栗子8

👤 传染问题

8. 有一人患了流感，经过两轮传染后共有64人患了流感，若每轮传染中平均每个人传染的人数相同，那么第三轮过后，共有 _____ 人患有流感。

【备注】 需要先算出每轮中1人传染多少人，然后再求第三轮传染和患病的人数

【答案】 512

【解析】 设每轮传染中平均每个人传染的人数为 x ，

$$\text{则 } 1+x+x(x+1)=64,$$

$$\text{解得, } x=7 \text{ 或 } x=-9 \text{ (舍),}$$

$$\therefore 64+64 \times 7=512 \text{ (人),}$$

那么第三轮过后，共有512人患有流感。

【标注】【知识点】一元二次方程的传播问题

栗子9

9. 有5人患了流感，经过两轮传染后共有605人患流感，则第一轮后患流感的人数为（ ）。

A. 10

B. 50

C. 55

D. 45

【备注】最初有5人患流感，相当于在原来1人的基础上扩大5倍，因此可以直接在公式前整体乘5计算。

【答案】C

【解析】设1人能传染 x 人，

$$5[1 + x + x(1 + x)] = 605,$$

$$(1 + x)^2 = 121,$$

$$1 + x = \pm 11,$$

$$\textcircled{1} 1 + x = 11, x = 10;$$

$$\textcircled{2} 1 + x = -11, x = -12 \text{ (舍)},$$

$$\text{则第一轮后患流感人数} = 5 \times (1 + 10) = 55 \text{ (人)}.$$

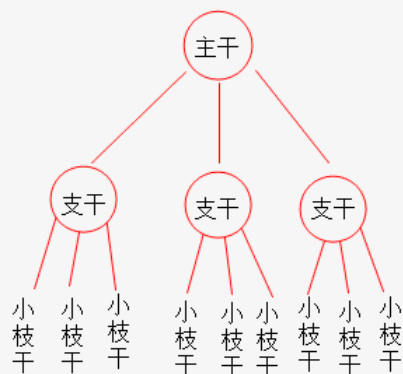
【标注】【知识点】一元二次方程的传播问题

栗子10

枝干问题

10. 某种植物的主干长出若干数目的支干又长出同样数目的小分支，主干、支干和小分支的总数是91。设每个支干长出 x 个小分支，则可得方程为_____。

【备注】枝干问题要与病毒传染问题作好区分，其本质在于主干不长小分支，因此在计算小分支时是不需要带主干的。



【答案】 $x^2 + x + 1 = 91$

【解析】 设每个支干长出 x 个小分支，
根据题意列方程得： $x^2 + x + 1 = 91$.
故答案为 $x^2 + x + 1 = 91$.

【标注】 【知识点】 一元二次方程的传播问题

四、单循环问题

探究：

10支球队，采取双循环赛制，则共需比赛 90 场，若采用单循环赛制共需比赛 45 场。

！总结：

n 支球队，采取双循环赛制，则共需比赛 $n(n-1)$ 场，若采用单循环赛制共需比赛 $\frac{n(n-1)}{2}$ 场

【备注】 n 支球队，每支球队需要比赛 $n-1$ 场，若采取双循环则共需 $n(n-1)$ 场；若采取单循环则 AB 、 BA 为一场比赛，因此要整体除以 2。

常见的单循环问题：握手，打电话，单循环比赛等。

常见的双循环问题：互送礼物，主客场比赛，每两只球队进行两场比赛等。

送贺卡问题和握手问题不同，握手只要两个人完成一次握手就代表了我和你完成了握手，同时我和你也完成了握手，即动作不重复进行。所以最终的式子要除以 2，去掉重复。

而送贺卡问题，为了表示礼尚往来，我送你一张贺卡，你也要送我一张贺卡，动作是重复进行。所以最终式子不用除以 2。

🍌 举个“栗”子

栗子11

🍌 单循环问题

11. 在某次商品交易会上每两家公司都签订了一份合同，所有公司签订了45份合同，设有 x 家参加这次交易会，则列出方程正确的是（ ）.

A. $x(x-1) = 45$ B. $\frac{1}{2}x(x-1) = 45$ C. $x(x+1) = 45$ D. $\frac{1}{2}x(x+1) = 45$

【备注】“每两家公司都签订一份合同”属于单循环问题

【答案】 B

【解析】一元二次方程应用中的循环问题，签订合同类似于握手问题，属于单循环，因此需除以2

【标注】【知识点】一元二次方程的握手、送礼物问题

栗子12

双循环问题

12. 2017—2018赛季中国男子篮球职业联赛，采用双循环制（每两队之间都要进行两场比赛），比赛总场数为380场，若设参赛队伍有 x 支，则可列方程为（ ）.

A. $\frac{1}{2}x(x-1) = 380$ B. $x(x-1) = 380$ C. $\frac{1}{2}x(x+1) = 380$ D. $x(x+1) = 380$

【备注】“每两队之间都要进行两场比赛”属于典型的双循环问题

【答案】 B

【解析】每队都要和其他队打比赛，故每队打 $(x-1)$ 场，共 x 支队，故 $x(x-1) = 380$.

故答案为B.

【标注】【知识点】一元二次方程的其他实际问题

13. 生物兴趣小组的学生，将自己手机的标本向本组其他成员各互赠一本，全组共互赠了182本，如果全组有 x 名同学，则根据题意列出的方程是（ ）.

A. $x(x+1) = 182$ B. $x(x-1) = 182$ C. $2x(x+1) = 182$ D. $x(x-1) = 182 \times 2$

【备注】送礼物属于双循环问题——礼尚往来

【答案】 B

【解析】∵全班有 x 名同学，

∴每名同学要送出 $(x-1)$ 张.

又∵是互送照片,

∴总共送的照片张数应该是 $x(x-1) = 182$.

【标注】【知识点】一元二次方程的握手、送礼物问题

五、几何问题

! 总结:

求解阴影部分面积问题需要利用 平移 的思想, 构造完整图形.

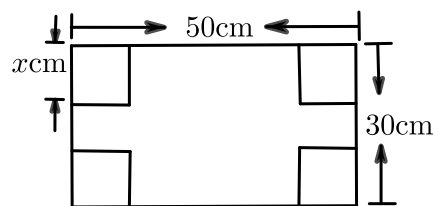
【备注】将空白部分全都平移到一侧, 然后计算阴影部分的面积. 此外这部分还会考察篱笆围矩形的问题, 要注意矩形的长不能大于墙长.

🧠 举个“栗”子

栗子13

🧠 与立体图形综合

14. 如图, 在一张长宽分别为50cm和30cm的长方形纸板上剪去四个边长为 x cm的小正方形, 并用它做成一个无盖的小长方体盒子, 若要使长方体盒子的底面积为 300cm^2 , 求 x 的值, 根据题意, 可列得的方程为().



A. $(50-x)(30-x) = 300$

B. $(50-2x)(30-2x) = 300$

C. $(50-2x)(30-x) = 300$

D. $1500 - 4x^2 = 300$

【备注】先求出长方体底面的长和宽, 然后求解面积即可; 这部分还可能考察立体图形的表面积, 可以对学生提问该长方体的高为多少

【答案】B

【解析】根据题意, 可列得的方程为 $(50-2x)(30-2x) = 300$.

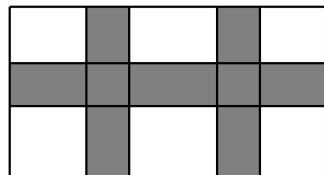
故选B.

【标注】【知识点】一元二次方程的几何问题

栗子14

利用平移的思想求面积

15. 如图所示，在宽20m，长为32m的矩形耕地上，修筑同样宽的三条道路，(互相垂直)，把耕地分成大小不等的六块试验田，要使试验田的面积为 570m^2 ，道路应为多宽？



【备注】将三个阴影部分进行平移，构造完整的矩形；部分同学可能会直接表示阴影部分的面积，这时候要注意最后的结果中要减去中间的两个小正方形（计算了两次）：

$$32x + 2 \times 20x - 2x^2 = 20 \times 32 - 570$$

【答案】道路宽为1m .

【解析】设道路宽为 $x\text{m}$ ，

$$\text{由题意}(32 - 2x)(20 - x) = 570 ,$$

$$\text{解得} x_1 = 1 , x_2 = 35 ,$$

$$\because x < 32 ,$$

$$\therefore x = 1 ,$$

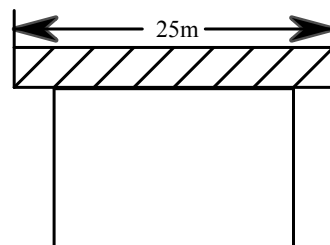
$$\therefore \text{道路宽为} 1\text{m} .$$

【标注】【知识点】一元二次方程的几何问题

栗子15

篱笆围矩形问题（不开口）

16. 如图，要建一个长方形养鸡场，养鸡场的一边靠墙（墙长25米），另三边用竹篱笆围成，竹篱笆的长为40米，若要围成的养鸡场的面积为180平方米，求养鸡场的长、宽各为多少米，设与墙平行的一边长为 x 米 .



(1) (用含 x 的代数式表示)另一边长为 _____ 米.

(2) 列出方程, 并求出问题的解.

【备注】 注意验证结果必须要小于等于墙长

【答案】 (1) $\frac{40-x}{2}$

(2) 长 $(20 - 2\sqrt{10})$ 米, 宽是 $(10 + \sqrt{10})$ 米.

【解析】 (1) 设与墙平行的一边长为 x 米, 另一边长为 $\frac{40-x}{2}$ 米,

故答案是: $\frac{40-x}{2}$.

(2) 设平行于墙的一边为 x 米, 则另一边长为 $\frac{40-x}{2}$ 米, 根据题意得:

$$x \cdot \frac{40-x}{2} = 180,$$

整理得出:

$$x^2 - 40x + 360 = 0,$$

$$\text{解得: } x_1 = 20 + 2\sqrt{10}, x_2 = 20 - 2\sqrt{10},$$

由于墙长25米, 而 $20 + 2\sqrt{10} > 25$,

$\therefore x_1 = 20 + 2\sqrt{10}$, 不合题意舍去,

$\therefore 0 < 20 - 2\sqrt{10} < 25$,

$\therefore x_2 = 20 - 2\sqrt{10}$, 符合题意,

此时 $\frac{40-x}{2} = 10 + \sqrt{10}$,

答: 此时鸡场靠墙的一边长 $(20 - 2\sqrt{10})$ 米, 宽是 $(10 + \sqrt{10})$ 米.

【标注】 【知识点】一元二次方程的几何问题

栗子16

篱笆围矩形问题 (有开口)

17. 如图, 要建一个面积为150平方米的长方形仓库, 仓库的一边靠墙, 这堵墙的长为18米, 在与墙平行的一边, 要开一扇3米宽的门, 已知围建仓库的现有木板材料可使新建板墙的总长为32米, 那么这个仓库与墙垂直的一边应长多少米?



【备注】 开口部分相当于将篱笆的长度延长3米，因此需要总长+3然后按照不开口问题进行计算，同样也要注意结果的判断

【答案】 10米 .

【解析】 设垂直于墙的一边长为 x 米，
则平行于墙的一边长为 $(32 - 2x + 3)$ 米，
由题意得，
$$x(32 - 2x + 3) = 150$$

整理得 $2x^2 - 35x + 150 = 0$ ，
解得 $x_1 = 10$ ， $x_2 = 7.5$ ，
当 $x = 10$ 时， $32 - 2x + 3 = 15 < 18$ ，
当 $x = 7.5$ 时， $32 - 2x + 3 = 20 > 18$ （不合题意，舍去）
答：这个仓库垂直于墙的一边为10米 .

【标注】 【知识点】一元二次方程的几何问题